第 60 卷　第 6 期　　中山大学学报（自然科学版）　　Vol. 60　No. 6
2021 年　11 月　　ACTA　SCIENTIARUM　NATURALIUM　UNIVERSITATIS　SUNYATSENI　　Nov.　2021

DOI:10. 13471/j. cnki. acta. snus. 2020. 07. 29. 2020A037

具无界中立系数的三阶 Emden-Fowler 微分方程的弱振动性*

曾云辉[1], 汪安宁[1], 汪志红[2], 罗李平[1]

1. 衡阳师范学院数学与统计学院, 湖南 衡阳 421002
2. 衡阳师范学院南岳学院数学与计算科学系, 湖南 衡阳 421008

摘　要：研究一类具有无界中立系数的三阶 Emden-Fowler 微分方程解的弱振动性。通过引入参数函数和广义 Riccati 变换，运用积分平均技术和一些分析技巧，获得了方程所有解弱振动的几个新的振动准则，所得结果推广和完善了最近文献中的一些结果。

关键词：三阶；Emden-Fowler 微分方程；弱振动性；非振动性

中图分类号：O175. 27　　**文献标志码：**A　　**文章编号：**0529 -6579（2021）06 -0169 -11

Weak oscillation of third-order Emden-Fowler neutral differential equations with unbounded neutral coefficients

ZENG Yunhui[1], *WANG Anning*[1], *WANG Zhihong*[2], *LUO Liping*[1]

1. *College of Mathematics and Statistics, Hengyang Normal University, Hengyang 421002, China*
2. *Department of Mathematics and Computational Science, Nanyue College of Hengyang Normal University, Hengyang 421008, China*

Abstract: The weak oscillation of solutions of third-order Emden-Fowler differential equations with unbounded neutral coefficients is studied. By introducing parameter function and the generalized Riccati transformations, using integral averaging technique and some necessary technique, some new oscillation criteria which ensure that all solutions of the studied equation weakly oscillates are obtained. The results generalize and perfect a number of related results in the literature recently.

Key words: third-order; Emden-Fowler differential equation; weak oscillation; nonoscillatory

考虑三阶 Emden-Fowler 微分方程

$$(a(t)(y(t)+p(t)y(\eta(t))'')'+b(t)y^{\lambda}(g(t))=0,\qquad t\geqslant t_0\geqslant 0. \tag{1}$$

总假设满足下列条件

(A_1) λ 是两个正奇数的商，$I=[t_0,+\infty)$, $\mathbf{R}^+=(0,+\infty)$；

* **收稿日期：**2020-07-29　　**录用日期：**2020-10-14　　**网络首发日期：**2021-01-09

基金项目：湖南省自然科学基金(2019JJ40004)；湖南省教育厅科学基金重点项目(20A063)；湖南省大学生创新创业训练计划项目(S201910546030,S202112659007,201912659004)；湖南省双一流应用特色学科项目(湘教通[2018]469)；湖南省重点实验室项目(2016TP1020)；衡阳师范学院“智能信息处理与应用湖南省重点实验室”开放基金(IIPA19K07)；

作者简介：曾云辉（1978 年生），男；**研究方向：**微分方程定性理论；E-mail：chj8121912@sina.com

通信作者：罗李平（1964 年生），男；**研究方向：**（脉冲）偏微分方程解的性态；E-mail：luolp3456034@163.com

(A_2) $a(t)\in C^1(I,\mathbf{R}^+), a'(t)\geqslant 0, b(t)\in C^1(I,\mathbf{R}^+), p(t)\in C(I,[1,+\infty))$，且$p(t)$不恒等于1；

(A_3) $\eta(t), g(t), \tau(t), \sigma(t)\in C(I,\mathbf{R}^+), \eta(t)\leqslant t, g(t)\leqslant t, \tau(t)\leqslant t, \sigma(t)\leqslant t, \eta(t)$在$I$上单调递增，且

$$\eta(t)\geqslant g(t),\quad \lim_{t\to+\infty}\eta(t)=\lim_{t\to+\infty}\tau(t)=\lim_{t\to+\infty}\sigma(t)=\lim_{t\to+\infty}g(t)=+\infty.$$

定义函数

$$x(t)=y(t)+p(t)y(\eta(t)). \tag{2}$$

方程(1)的一个解是指函数$y(t)\in C^1\left[T_y,+\infty\right), T_y\geqslant t_0$，使得$a(t)x''(t)\in C^1[T_y,+\infty)$且在$[T_y,+\infty)$上满足方程(1)。本文仅考虑方程(1)中满足$\mathrm{Sup}\{\left|y(t)\right|: t\geqslant T\}>0$对一切$T\geqslant T_y$成立的解。方程(1)的解称为振动，如果它在$[T_y,+\infty)$上既无最终正解，也无最终负解，否则，称它为非振动。方程(1)的解称为弱振动，如果它的每一解$y(t)$振动，或者当$t\to+\infty$时，$y(t)\to 0$.

最近，三阶微分方程的振动与非振动理论的研究受到中外学者们的广泛关注，并取得了很好的结果[1-14]。但是，我们注意到这些结果大部分都与$-1<p_0\leqslant p(t)\leqslant 0, 0\leqslant p(t)\leqslant p_0<1$或$0\leqslant p(t)\leqslant p_0<+\infty$的情况有关且要求时滞条件$\tau\circ\delta=\delta\circ\tau$或者$\tau\circ\delta=\delta\circ\tau$和$\tau\circ\sigma=\sigma\circ\tau$成立，这些条件限制性很强，不容易满足，在$p(t)>1$包括当$t\to+\infty$时，$p(t)\to+\infty$的情况下相关的振动结果还不是很多。例如，参看文献[15-18]。我们也注意到文献[18]考虑了方程(1)的如下特例

$$(y(t)+p(t)y(\eta(t)))'''+b(t)y^{\lambda}(g(t))=0. \tag{3}$$

在$\eta\circ g\neq g\circ\eta$的条件下通过将三阶非线性泛函微分方程转化为一阶微分方程组，然后用比较方法给出了方程(3)在正则条件下解的振动准则。但据我们所知，文献[15-18]均未考虑非正则的情况，因此，研究方程(1)在$\eta\circ g\neq g\circ\eta$和非正则条件下的振动性问题是非常有意义的。

本文目的是在$\eta\circ g\neq g\circ\eta$情况下，通过引入参数函数并利用新得到的Riccati变换对方程(1)展开研究，分别在正则条件

$$\int_{t_0}^{+\infty}a^{-1}(t)\mathrm{d}t=+\infty \tag{4}$$

和非正则条件

$$\int_{t_0}^{+\infty}a^{-1}(t)\mathrm{d}t<+\infty, \tag{5}$$

成立下，建立方程(1)解振动新的充分条件，所得结果是文献[18]的一个补充，同时也改进了文献[18]相关结果。

下文中出现的不等式如果没有特殊的说明，均假设对一切充分大的t成立。为了书写方便，引入记号

$$\gamma'_+(t)=\max\{0,\gamma'(t)\}, \tag{6}$$

$$\varphi^*(t)=\frac{1}{p(\eta^{-1}(t))}\left(1-\frac{1}{p(\eta^{-1}(\eta^{-1}(t)))}\right), \tag{7}$$

$$\varphi_*(t)=\frac{1}{p(\eta^{-1}(t))}\left(1-\frac{1}{p(\eta^{-1}(\eta^{-1}(t)))}\cdot\frac{\alpha(\eta^{-1}(\eta^{-1}(t)))}{\alpha(\eta^{-1}(t))}\right), \tag{8}$$

$$\psi(t)=\frac{1}{p(\eta^{-1}(t))}\left(1-\frac{1}{p(\eta^{-1}(\eta^{-1}(t)))}\cdot\frac{\beta(\eta^{-1}(\eta^{-1}(t)))}{\beta(\eta^{-1}(t))}\right), \tag{9}$$

其中η^{-1}是η的反函数，$\alpha(t),\beta(t)$是本文后面所引入的参数函数。

1 主要引理

引理1 若条件(A_1)~(A_3)成立，$y(t)$是方程(1)的正解，则$x(t)$只可能有以下3种情形：当t_1充分大时，

对 $t \geqslant t_1$ 成立

(I) $x(t) > 0$, $x'(t) > 0$, $x''(t) > 0$, $x'''(t) \leqslant 0$, $(a(t)x''(t))' \leqslant 0$;

(II) $x(t) > 0$, $x'(t) < 0$, $x''(t) > 0$, $x'''(t) \leqslant 0$, $(a(t)x''(t))' \leqslant 0$;

(III) $x(t) > 0$, $x'(t) > 0$, $x''(t) < 0$, $(a(t)x''(t))' \leqslant 0$.

特别，当条件(4)成立时，则 $x(t)$ 只可能出现情形(I)和情形(II)。

证明　引理1的证明类似文献[19]引理1的证明。故略去。

引理2　若条件(A_1)~(A_3)及 $\varphi^*(t) > 0$ 成立，$y(t)$ 是方程(1)的正解，且 $x(t)$ 具有引理1中的情形(II)。若

$$\int_{t_0}^{+\infty}\int_{v}^{+\infty}\left(\frac{1}{a(u)}\int_{u}^{+\infty} b(s)\,(\varphi^*(g(s)))^{\lambda}\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}u\mathrm{d}v = +\infty, \tag{10}$$

则 $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = 0$.

证明　设 $y(t)$ 是(1)的最终正解，且相应的 $x(t)$ 具有引理1中的情形(II)，则存在 $t_1 \in [t_0, +\infty)$，当 $t \in [t_1, +\infty)$ 时，有 $y(t) > 0, y(\eta(t)) > 0, y(g(t)) > 0$. 由 $x(t)$ 的定义有

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{p(\eta^{-1}(t))}\left(x(\eta^{-1}(t)) - y(\eta^{-1}(t))\right) \\ &= \frac{x(\eta^{-1}(t))}{p(\eta^{-1}(t))} - \frac{1}{p(\eta^{-1}(t))p(\eta^{-1}(\eta^{-1}(t)))}\left[x(\eta^{-1}(\eta^{-1}(t))) - y(\eta^{-1}(\eta^{-1}(t)))\right] \\ &\geqslant \frac{x(\eta^{-1}(t))}{p(\eta^{-1}(t))} - \frac{1}{p(\eta^{-1}(t))p(\eta^{-1}(\eta^{-1}(t)))}x(\eta^{-1}(\eta^{-1}(t))). \end{aligned} \tag{11}$$

因 $x(t)$ 为减函数且 $\eta(t) \leqslant t$, 有

$$x(\eta^{-1}(t)) \geqslant x(\eta^{-1}(\eta^{-1}(t))).$$

将上式代入(11)式得

$$y(t) \geqslant \frac{x(\eta^{-1}(t))}{p(\eta^{-1}(t))} - \frac{x(\eta^{-1}(t))}{p(\eta^{-1}(t))p(\eta^{-1}(\eta^{-1}(t)))} = \frac{1}{p(\eta^{-1}(t))}\left(1 - \frac{1}{p(\eta^{-1}(\eta^{-1}(t)))}\right)x(\eta^{-1}(t)) = \varphi^*(t)x(\eta^{-1}(t)).$$

即有

$$y(g(t)) \geqslant \varphi^*(g(t))x(\eta^{-1}(g(t))). \tag{12}$$

联合方程(1)和(12)式得

$$(a(t)x''(t))' + b(t)(\varphi^*(g(t)))^{\lambda}[x(\eta^{-1}(g(t)))]^{\lambda} \leqslant 0, \quad t \geqslant t_1. \tag{13}$$

又由于 $x(t)$ 具有引理1中的情形(II)，故存在非负常数 L, 使得 $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = L < +\infty$. 我们可以断言：$L = 0$. 事实上如果 $L > 0$, 则存在 $t_2 \geqslant t_1$ 使得 $\eta^{-1}(g(t)) > t_1$ 且 $x(t) \geqslant L, t \geqslant t_2$.

对(13)式从 t 到 $+\infty$ 积分得

$$a(s)x''(s)\Big|_t^{+\infty} \leqslant -\int_t^{+\infty} b(s)(\varphi^*(g(s)))^{\lambda}(x(\eta^{-1}(g(s))))^{\lambda}\mathrm{d}s.$$

注意到 $x(\eta^{-1}(g(t))) \geqslant L, t > t_3 \geqslant t_2$, 有

$$(x''(s)) \geqslant \frac{L^{\lambda}}{a(t)}\int_t^{+\infty} b(s)(\varphi^*(g(s)))^{\lambda}\mathrm{d}s.$$

从而

$$x''(t) \geqslant \frac{L^{\lambda}}{a(t)}\int_t^{+\infty} b(s)(\varphi^*(g(s)))^{\lambda}\mathrm{d}s. \tag{14}$$

在 $[t_3, t]$ 上对(14)式积分得

$$\int_{t_3}^{t}\int_{v}^{+\infty}\frac{1}{a(u)}\int_{u}^{+\infty} b(s)(\varphi^*(g(s)))^{\lambda}\mathrm{d}s\mathrm{d}u\mathrm{d}v \leqslant \frac{x(t_3)}{L^{\lambda}}.$$

此与(10)式矛盾。因此 $L = 0$. 又由于 $0 < y(t) \leqslant x(t)$，于是 $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t) = 0$. 引理2证毕。

引理3[20]　设 $B > 0, C > 0, X \geqslant 0, \zeta > 0$ 为常数，则

$$BX - CX^{\frac{\zeta+1}{\zeta}} \leqslant \frac{\zeta^{\zeta}}{(\zeta+1)^{\zeta+1}}\cdot\frac{B^{\zeta+1}}{C^{\zeta}}.$$

引理4（见文献[21]引理2.2.3）　设 $f(t) \in C^n\left(\left[t_0, +\infty\right), \mathbf{R}^+\right)$，若 $f^{(n)}(t)$ 对一切充分大的 t 最终定号，且

存在 $t_1 \geqslant t_0$ 使得 $f^{(n-1)}(t) f^{(n)}(t) \leqslant 0$ 对一切 $t \geqslant t_1$ 成立。如果 $\lim_{t \to +\infty} f(t) \neq 0$，则对每一 $\delta \in (0,1)$，存在 $t_\delta \in [t_1, +\infty)$ 使得

$$f(t) \geqslant \frac{\delta}{(n-1)!} t^{n-1} \left| f^{(n)}(t) \right|, \qquad t \in [t_\delta, +\infty).$$

引理 5 [1] 设函数 $z(t)$ 满足 $z^{(i)}(t) > 0, i = 0, 1, \cdots, k$，且 $z^{(k+1)}(t) \leqslant 0$，则 $z(t) \geqslant \frac{t}{k} z'(t)$ 最终成立。

引理 6 设条件 (A_1)~(A_3) 和 $\varphi_*(t) > 0$ 满足，方程(1)存在最终正解 $y(t)$，且 $x(t)$ 相应满足引理 1 中的情形(I)，若存在函数 $\alpha(t) \in C^1(I, \mathbf{R}^+)$ 使得

$$2\alpha(t) - t\alpha'(t) \leqslant 0, \tag{15}$$

则 $x(t)$ 满足不等式

$$(a(t)x''(t))' + b(t)(\varphi_*(g(t)))^\lambda (x(\eta^{-1}(g(t))))^\lambda \leqslant 0, \quad t \geqslant t_1. \tag{16}$$

证明 设方程(1)有非振动解 $y(t)$，不失一般性，我们设 $y(t) > 0, y(\eta(t)) > 0, y(g(t)) > 0$，(15)式和 $\eta^{-1}(g(t)) > t_1, t \geqslant t_1 \geqslant t_0$ 成立。当 $y(t) < 0$ 的情况类似的分析成立。由引理 2 的证明可得(11)式。又因为 $x(t)$ 满足引理 1 中的情形(I)，由引理 5 可得

$$\frac{x(t)}{x'(t)} \geqslant \frac{t}{2}, \quad t \geqslant t_1.$$

联合上式和(15)式，有

$$\left(\frac{x(t)}{\alpha(t)}\right)' = \frac{1}{\alpha^2(t)} [x'(t)\alpha(t) - x(t)\alpha'(t)] \leqslant \frac{1}{\alpha^2(t)} \left[\frac{2x(t)}{t}\alpha(t) - x(t)\alpha'(t)\right] = \frac{x(t)}{t\alpha^2(t)} [2\alpha(t) - t\alpha'(t)] \leqslant 0.$$

故 $x(t)/\alpha(t)$ 非增。又注意到 $\eta(t)$ 为增函数且 $\eta(t) \leqslant t$，从而 $\eta^{-1}(t) \leqslant \eta^{-1}(\eta^{-1}(t))$，于是有

$$\frac{\alpha(\eta^{-1}(\eta^{-1}(t)))x(\eta^{-1}(t))}{\alpha(\eta^{-1}(t))} \geqslant x(\eta^{-1}(\eta^{-1}(t))). \tag{17}$$

现将(17)式代入(11)式产生

$$\begin{aligned}
y(t) &\geqslant \frac{x(\eta^{-1}(t))}{p(\eta^{-1}(t))} - \frac{x(\eta^{-1}(\eta^{-1}(t)))}{p(\eta^{-1}(t))p(\eta^{-1}(\eta^{-1}(t)))} \\
&\geqslant \frac{x(\eta^{-1}(t))}{p(\eta^{-1}(t))} - \frac{1}{p(\eta^{-1}(t))p(\eta^{-1}(\eta^{-1}(t)))} \cdot \frac{\alpha(\eta^{-1}(\eta^{-1}(t)))x(\eta^{-1}(t))}{\alpha(\eta^{-1}(t))} \\
&= \frac{1}{p(\eta^{-1}(t))}\left[1 - \frac{\alpha(\eta^{-1}(\eta^{-1}(t)))}{p(\eta^{-1}(\eta^{-1}(t)))\alpha(\eta^{-1}(t))}\right] x(\eta^{-1}(t)) \\
&= \varphi_*(t)x(\eta^{-1}(t)).
\end{aligned}$$

即

$$y(g(t)) \geqslant \varphi_*(g(t))x(\eta^{-1}(g(t))). \tag{18}$$

联合方程(1)和(18)式可得(16)式。引理 6 证毕。

引理 7 设条件 (A_1)~(A_3) 和 $\psi(t) > 0$ 满足，$y(t)$ 是方程(1)的最终正解，且 $x(t)$ 相应满足引理 1 中的情形(III)，若存在函数 $\beta(t) \in C^1(I, \mathbf{R}^+)$ 满足

$$\beta(t) - t\beta'(t) \leqslant 0, \tag{19}$$

则 $x(t)$ 满足不等式

$$(a(t)x''(t))' + b(t)(\psi(g(t)))^\lambda (x(\eta^{-1}(g(t))))^\lambda \leqslant 0, \qquad t \geqslant t_1. \tag{20}$$

证明 本引理的证明类似于引理 6 的证明，略。

2　主要结果

定理1　设条件$(A_1)\sim(A_3)$和条件(4)满足，若

$$\int_{t_0}^{+\infty} b(s)(\varphi_*(g(s)))^\lambda \mathrm{d}s = +\infty, \tag{21}$$

成立，则方程(1)的每一解弱振动。

证明　设$y(t)$是方程(1)的非振动解。不失一般性，设$y(t)$最终为正，由引理1和(4)式成立，则$x(t)$只可能有(I)和(II)两种情形。

若$x(t)$满足情形(I)，由引理6，有

$$(a(t)x''(t))' + b(t)(\varphi_*(g(t)))^\lambda (x(\eta^{-1}(g(t))))^\lambda \leqslant 0, \quad t \geqslant t_1.$$

对上式从t_1到t积分得

$$a(t)x''(t) \leqslant a(t_1)x''(t_1) - \int_{t_1}^{t} b(s)(\varphi_*(g(s)))^\lambda (x(\eta^{-1}(g(s))))^\lambda \mathrm{d}s.$$

因$x(t) > 0$和$x'(t) > 0$，故存在常数$M > 0$，使得$x(t) \geqslant M$，有

$$a(t)x''(t) \leqslant a(t_1)x''(t_1) - M^\lambda \int_{t_1}^{t} b(s)(\varphi_*(g(s)))^\lambda \mathrm{d}s.$$

因此

$$\int_{t_1}^{t} b(s)(\varphi_*(g(s)))^\lambda \mathrm{d}s \leqslant \frac{a(t_1)x''(t_1)}{M^\lambda}.$$

此与条件(21)矛盾。

设$x(t)$满足情形(II)，则由引理2得$\lim\limits_{t\to+\infty} y(t) = 0$. 证毕.

下面进一步考虑如果定理1的条件(4)和(21)中有一个条件不满足将如何弥补？为此，首先考虑条件(21)不满足的情况，我们有如下定理。

定理2　设条件$(A_1)\sim(A_3)$和(10)式满足，对于充分大的t有$\varphi_*(t) > 0$和$\varphi^*(t) > 0$，(4)式成立且存在函数$\alpha(t) \in C^1(I, \mathbf{R}^+)$满足(15)式。如果存在函数$\gamma(t) \in C^1(I, \mathbf{R}^+)$，常数$\delta \in (0,1)$和$L_0 > 0$满足

$$\int_{t_0}^{+\infty}\left[\gamma(s)b(s)(\varphi_*(g(s)))^\lambda \frac{(\eta^{-1}(g(s)))^{2\lambda}}{s^{2\lambda}} - \frac{a(s)(\gamma'_+(s))^{\xi+1}}{(\delta L_0 s\gamma(s))^{\xi}}\right]\mathrm{d}s = +\infty, \tag{22}$$

其中$\gamma'_+(t) = \max\{0, \gamma'(t)\}, \xi = \min\{1, \lambda\}, \varphi_*(t)$由(8)式定义，则方程(1)的每一解弱振动。

证明　设方程(1)有最终正解$y(t)$，即存在充分大的t_1，使得当$t \geqslant t_1 \geqslant t_0$时，有$y(t) > 0, y(\eta(t)) > 0, y(g(t)) > 0$和$\eta^{-1}(g(t)) > t_1$成立。当$y(t) < 0$的情况类似的分析成立。由引理2的证明可得(11)式。又由于$z(t)$满足引理1中的情形(I)，于是由引理5得

$$\frac{x(t)}{x'(t)} \geqslant \frac{t}{2}, \quad t \geqslant t_1.$$

对上式从$\eta^{-1}(g(t)) > t_1$到t积分得

$$\frac{x(t)}{x(\eta^{-1}(g(t)))} \leqslant \left(\frac{t}{\eta^{-1}(g(t))}\right)^2. \tag{23}$$

另外，由$x(t)$满足情形(I)，知$\lim\limits_{t\to+\infty} x'(t) \neq 0$. 根据引理4，对每一常数$\delta \in (0,1)$和一切充分大的$t$，有

$$x'(t) \geqslant \delta t x''(t). \tag{24}$$

令

$$v(t) = \gamma(t)\frac{a(t)x''(t)}{x^\lambda(t)}, \quad t \geqslant t_1, \tag{25}$$

则$v(t) > 0$, $t \geqslant t_1$. 利用(16)式和(23)~(25)式可得

$$
\begin{aligned}
v'(t) &= \gamma'(t)\frac{a(t)x''(t)}{x^{\lambda}(t)} + \gamma(t)\frac{(a(t)x''(t))'x^{\lambda}(t) - \lambda x^{\lambda-1}(t)x'(t)a(t)x''(t)}{x^{2\lambda}(t)} \\
&= \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)}v(t) + \gamma(t)\frac{(a(t)x''(t))'}{x^{\lambda}(t)} - \lambda\gamma(t)a(t)\frac{x''(t)x'(t)}{x^{\lambda+1}(t)} \\
&\leqslant \frac{\gamma'_+(t)}{\gamma(t)}v(t) - \gamma(t)\frac{b(t)(\varphi_*(g(t)))^{\lambda}(x(\eta^{-1}(g(t))))^{\lambda}}{x^{\lambda}(t)} - \lambda\delta t\gamma(t)a(t)\frac{(x''(t))^2}{x^{\lambda+1}(t)} \\
&\leqslant \frac{\gamma'_+(t)}{\gamma(t)}v(t) - \gamma(t)b(t)(\varphi_*(g(t)))^{\lambda}\frac{(\eta^{-1}(g(t)))^{2\lambda}}{t^{2\lambda}} - \lambda\delta t\gamma(t)a(t)\frac{(x''(t))^2}{x^{\lambda+1}(t)} \\
&= -\gamma(t)b(t)(\varphi_*(g(t)))^{\lambda}\frac{(\eta^{-1}(g(t)))^{2\lambda}}{t^{2\lambda}} + \frac{\gamma'_+(t)}{\gamma(t)}v(t) - \frac{\lambda\delta t\gamma(t)a(t)(x''(t))^2}{x^{\lambda+1}(t)}.
\end{aligned}
\tag{26}
$$

注意到$x(t)>0$和$x'(t)>0$，故存在常数$L_1>0$，使得当$\lambda \geqslant 1$时有

$$[x(t)]^{\lambda-1} \geqslant L_1, \qquad t \geqslant t_2 \geqslant t_1.$$

则由(26)式得

$$
\begin{aligned}
v'(t) &\leqslant -\gamma(t)b(t)(\varphi_*(g(t)))^{\lambda}\frac{(\eta^{-1}(g(t)))^{2\lambda}}{t^{2\lambda}} + \frac{\gamma'_+(t)}{\gamma(t)}v(t) - \frac{\lambda\delta t\gamma(t)a(t)(x''(t))^2}{x^{\lambda+1}(t)} \\
&= -\gamma(t)b(t)(\varphi_*(g(t)))^{\lambda}\frac{(\eta^{-1}(g(t)))^{2\lambda}}{t^{2\lambda}} + \frac{\gamma'_+(t)}{\gamma(t)}v(t) - \frac{\lambda\delta t}{\gamma(t)a(t)}[x(t)]^{\lambda-1}\left(\frac{\gamma(t)a(t)(x''(t))}{x^{\lambda}(t)}\right)^2 \\
&\leqslant -\gamma(t)b(t)(\varphi_*(g(t)))^{\lambda}\frac{(\eta^{-1}(g(t)))^{2\lambda}}{t^{2\lambda}} + \frac{\gamma'_+(t)}{\gamma(t)}v(t) - \frac{\lambda\delta t L_1}{\gamma(t)a(t)}v^2(t), \qquad \lambda \geqslant 1.
\end{aligned}
\tag{27}
$$

又由于$x''(t)>0$和$x'''(t)\leqslant 0$，故当$\lambda<1$时存在常数$L_2>0$和$t_3 \geqslant t_2$使得

$$[x''(t)]^{\frac{\lambda-1}{\lambda}} \geqslant L_2, \qquad t \geqslant t_3.$$

因此，由(26)式得

$$
\begin{aligned}
v'(t) &\leqslant -\gamma(t)b(t)(\varphi_*(g(t)))^{\lambda}\frac{(\eta^{-1}(g(t)))^{2\lambda}}{t^{2\lambda}} + \frac{\gamma'_+(t)}{\gamma(t)}v(t) - \frac{\lambda\delta t\gamma(t)a(t)(x''(t))^2}{x^{\lambda+1}(t)} \\
&= -\gamma(t)b(t)(\varphi_*(g(t)))^{\lambda}\frac{(\eta^{-1}(g(t)))^{2\lambda}}{t^{2\lambda}} + \frac{\gamma'_+(t)}{\gamma(t)}v(t) - \frac{\lambda\delta t}{(\gamma(t)a(t))^{\frac{1}{\lambda}}}[x''(t)]^{\frac{\lambda-1}{\lambda}}\left(\frac{\gamma(t)a(t)x''(t)}{x^{\lambda}(t)}\right)^{\frac{\lambda+1}{\lambda}} \\
&\leqslant -\gamma(t)b(t)(\varphi_*(g(t)))^{\lambda}\frac{(\eta^{-1}(g(t)))^{2\lambda}}{t^{2\lambda}} + \frac{\gamma'_+(t)}{\gamma(t)}v(t) - \frac{\lambda\delta t L_2}{(\gamma(t)a(t))^{\frac{1}{\lambda}}}v^{\frac{\lambda+1}{\lambda}}(t), \qquad \lambda<1.
\end{aligned}
\tag{28}
$$

联合(27)~(28)式，得到

$$v'(t) \leqslant -\gamma(t)b(t)(\varphi_*(g(t)))^{\lambda}\frac{(\eta^{-1}(g(t)))^{2\lambda}}{t^{2\lambda}} + \frac{\gamma'_+(t)}{\gamma(t)}v(t) - \frac{\xi\delta t L_0}{(\gamma(t)a(t))^{\frac{1}{\xi}}}v^{\frac{\xi+1}{\xi}}(t), \tag{29}$$

其中$\xi=\min\{1,\lambda\}, L_0=\min\{L_1,L_2\}$, 且当$\lambda=1$时$L_0=1$.

取$B=\dfrac{\gamma'_+(t)}{\gamma(t)}, C=\dfrac{\xi\delta t L_0}{(\gamma(t)a(t))^{\frac{1}{\xi}}}$, 利用引理3的不等式，由(29)式得

$$
\begin{aligned}
v'(t) &\leqslant -\gamma(t)b(t)(\varphi_*(g(t)))^{\lambda}\frac{(\eta^{-1}(g(t)))^{2\lambda}}{t^{2\lambda}} + \frac{1}{(\xi+1)^{\xi+1}}\frac{a(t)(\gamma'_+(t))^{\xi+1}}{(\delta L_0 t\gamma(t))^{\xi}} \\
&\leqslant -\gamma(t)b(t)(\varphi_*(g(t)))^{\lambda}\frac{(\eta^{-1}(g(t)))^{2\lambda}}{t^{2\lambda}} + \frac{a(t)(\gamma'_+(t))^{\xi+1}}{(\delta L_0 t\gamma(t))^{\xi}}.
\end{aligned}
$$

从t_3到t对上式积分得

$$\int_{t_3}^{t}\left[\gamma(s)b(s)(\varphi_*(g(s)))^{\lambda}\frac{(\eta^{-1}(g(s)))^{2\lambda}}{s^{2\lambda}} - \frac{a(s)(\gamma'_+(s))^{\xi+1}}{(\delta L_0 s\gamma(s))^{\xi}}\right]\mathrm{d}s \leqslant v(t_3).$$

此与(22)式矛盾。

设$x(t)$满足情形 (II)，则由引理2得$\lim\limits_{t\to+\infty} y(t)=0$. 证毕.

注1　定理2既适用于条件(21)成立，也适用于条件(21)不成立的情况。

下面的定理是关于方程(1)的Philos型振动准则，为此，考虑集合

$$D=\{(t,s): t\geqslant s\geqslant t_0\},\qquad D_0=\{(t,s): t>s\geqslant t_0\}.$$

函数$H\in C(D,\mathbf{R})$称为属于X类，记作$H\in X$, 如果它满足

(i)　$H(t,t)=0, t\geqslant t_0$；$H(t,s)>0,(t,s)\in D_0$；

(ii)　$\dfrac{\partial H(t,s)}{\partial s}\leqslant 0$且存在$\gamma(t)\in C^1([t_0,+\infty),(0,+\infty))$和$h(t,s)\in C(D_0,\mathbf{R})$使得

$$-\frac{\partial H(t,s)}{\partial s}=\frac{\gamma'_+(s)}{\gamma(s)}H(t,s)+h(t,s),\qquad (t,s)\in D_0.$$

定理3　设条件(A_1)~(A_3)和(10)式满足。若条件(4)成立且满足函数$\gamma(t)\in C^1(I,\mathbf{R}^+)$, $h(t,s)\in C(D_0,\mathbf{R})$使得$H\in X$，若存在常数$\delta\in(0,1)$和$L_0>0$使得

$$\limsup_{t\to+\infty}\frac{1}{H(t,t_0)}\int_{t_0}^{t}\left[H(t,s)\phi(s)-\frac{1}{(\xi+1)^{\xi+1}}\frac{\gamma(s)a(s)\left|h(t,s)\right|^{\xi+1}}{(\delta L_0 s)^{\xi}H^{\xi}(t,s)}\right]\mathrm{d}s=+\infty,\tag{30}$$

其中$\xi=\min\{1,\lambda\}$,

$$\phi(t)=\gamma(t)b(t)(\varphi_*(g(t)))^{\lambda}\frac{(\eta^{-1}(g(t)))^{2\lambda}}{t^{2\lambda}},\tag{31}$$

则方程(1)的每一解$y(t)$弱振动。

证明　设方程(1)有非振动解$y(t)$，由条件(4)成立，$x(t)$只可能有情形(I)和情形 (II)。首先，设$x(t)$满足情形(I)，引入Riccati变换$v(t)$同(25)式，则如同定理2的证明一样，(29)式成立。令

$$B(t)=\frac{\gamma'_+(t)}{\gamma(t)},$$

和

$$C(t)=\frac{\xi\delta L_0 t}{(\gamma(t)a(t))^{\frac{1}{\xi}}}.\tag{32}$$

将(31)~(32)式代入(29)式，得

$$v'(t)\leqslant-\phi(t)+B(t)v(t)-C(t)v^{\frac{\xi+1}{\xi}}(t),\tag{33}$$

其中$\phi(t)$由(31)式定义。

用$H(t,s)$乘不等式(33)且从T到t积分有

$$\begin{aligned}\int_T^t H(t,s)\phi(s)\mathrm{d}s&\leqslant\int_T^t H(t,s)\left[-v'(s)+B(s)v(s)-C(s)v^{1+\frac{1}{\xi}}(s)\right]\mathrm{d}s\\&=H(t,T)v(T)-\int_T^t\left[\frac{\partial H(t,s)}{\partial s}+H(t,s)B(s)\right]v(s)\mathrm{d}s-\int_T^t H(t,s)C(s)v^{1+\frac{1}{\xi}}(s)\mathrm{d}s\\&=H(t,T)v(T)-\int_T^t h(t,s)v(s)\mathrm{d}s-\int_T^t H(t,s)C(s)v^{1+\frac{1}{\xi}}(s)\mathrm{d}s\\&\leqslant H(t,T)v(T)+\int_T^t\left[\left|h(t,s)\right|v(s)-H(t,s)C(s)v^{1+\frac{1}{\xi}}(s)\right]\mathrm{d}s.\end{aligned}\tag{34}$$

取$B=\left|h(t,s)\right|, C=H(t,s)C(s)$, 应用引理3的不等式得

$$\left|h(t,s)\right|v(s)-H(t,s)B(s)v^{\frac{1+\xi}{\xi}}(s)\leqslant\frac{\xi^{\xi}}{(\xi+1)^{\xi+1}}\frac{\left|h(t,s)\right|^{\xi+1}}{(H(t,s)C(s))^{\xi}}.\tag{35}$$

联合(32)式和(35)式，则(34)式变为

$$\int_T^t H(t,s)\phi(s)\mathrm{d}s\leqslant H(t,T)v(T)+\int_T^t\frac{1}{(\xi+1)^{\xi+1}}\cdot\frac{\gamma(t)a(t)\left|h(t,s)\right|^{\xi+1}}{(\delta L_0 s)^{\xi}H^{\xi}(t,s)}\mathrm{d}s.$$

因此

$$\frac{1}{H(t,T)}\int_T^t\left[H(t,s)\phi(s)-\frac{1}{(\xi+1)^{\xi+1}}\cdot\frac{\gamma(s)a(s)\left|h(t,s)\right|^{\xi+1}}{(\delta L_0 s)^{\xi}H^{\xi}(t,s)}\right]\mathrm{d}s\leqslant v(T), \tag{36}$$

对一切充分大的t成立，此与(30)式矛盾。

现设$x(t)$具有引理1的情形 (II)。则由引理2有$\lim\limits_{t\to+\infty}y(t)=0$. 证毕.

最后我们考虑定理1中条件(4)不满足的情况。

定理4 假设条件$(\mathrm{A}_1)\sim(\mathrm{A}_3)$和(10)式满足，对于充分大的$t$满足$\varphi_*(t)>0,\varphi^*(t)>0$和$\psi(t)>0$. 若条件(5)成立且存在函数$\alpha(t),\beta(t)\in C^1(I,\mathbf{R}^+)$分别满足(15)式、(19)式。如果存在函数$\gamma(t)\in C^1(I,\mathbf{R}^+)$, 常数$\delta\in(0,1)$和$L_0>0$使得(22)式成立，又存在常数$K>0$满足

$$\int_T^{+\infty}\left[\rho^{\eta}(s)b(s)(\psi(g(s))\eta^{-1}(g(s)))^{\lambda}-\frac{\mu}{\rho(s)a(s)}\right]\mathrm{d}s=+\infty, \tag{37}$$

其中$\rho(t)=\int_t^{+\infty}a^{-1}(s)\mathrm{d}s$, $\mu=\left(\frac{\eta}{\eta+1}\right)^{\eta+1}\left(\frac{\eta}{K}\right)^{\eta}$, $\eta=\max\{1,\lambda\}$, 当$\lambda=1$时，$K=1$且$\mu=\frac{1}{4}$, 则方程(1)的每一解$y(t)$弱振动。

证明 设方程(1)存在非振动解$y(t)$. 不失一般性，设$y(t)$为最终正解。由引理1，$x(t)$只可能有三种情形(I)、情形(II)和情形(III)。首先，设$x(t)$满足情形(I)，由定理2的证明可产生与条件(22)矛盾。如果$x(t)$满足情形(II)，由引理2可得$\lim\limits_{t\to+\infty}y(t)=0$. 现设$x(t)$满足情形(III)，即有$x(t)>0,x'(t)>0,x''(t)<0$和$(a(t)x''(t))'\leqslant 0$. 由引理7知(20)式成立，亦即

$$(a(t)(-x''(t)))'\geqslant b(t)(\psi(g(t))^{\lambda}x^{\lambda}(\eta^{-1}(g(t)))\geqslant 0. \tag{38}$$

令

$$w(t)=\frac{a(t)(-x''(t))}{(x'(t))^{\lambda}},\quad t\geqslant t_1, \tag{39}$$

则$w(t)>0,t\geqslant t_1$. 微分(39)式并应用(38)式得

$$w'(t)\geqslant b(t)(\psi(g(t)))^{\lambda}\left(\frac{x(\eta^{-1}(g(t)))}{x'(t)}\right)^{\lambda}+\frac{\lambda a(t)(-x''(t))^2}{(x'(t))^{\lambda+1}}. \tag{40}$$

因$x(t)$满足情形(III)，由引理5，得到$x(t)\geqslant tx'(t)$. 由条件(A_3)知$\eta(t)$为增函数，故$\eta^{-1}(t)$也为增函数。又注意到$\eta(t)\geqslant g(t)$，所以$t\geqslant\eta^{-1}(g(t))$，从而

$$x(\eta^{-1}(g(t)))\geqslant\eta^{-1}(g(t))x'(\eta^{-1}(g(t)))\geqslant\eta^{-1}(g(t))x'(t),$$

即

$$\frac{x(\eta^{-1}(g(t)))}{x'(t)}\geqslant\eta^{-1}(g(t)). \tag{41}$$

将(41)式代入(40)式有

$$w'(t)\geqslant b(t)[\psi(g(t))\eta^{-1}(g(t))]^{\lambda}+\frac{\lambda a(t)(-x''(t))^2}{(x'(t))^{\lambda+1}}. \tag{42}$$

当$0<\lambda\leqslant 1$时，$[x'(t)]^{\lambda-1}$非减，故存在常数$K_1>0$和充分大t_2，使得

$$[x'(t)]^{\lambda-1}\geqslant K_1,\qquad t\geqslant t_2.$$

则由(42)式得

$$\begin{aligned}w'(t)&\geqslant b(t)\left[\psi(g(t))\eta^{-1}(g(t))\right]^{\lambda}+\frac{\lambda}{a(t)}[x'(t)]^{\lambda-1}w^2(t)\\&\geqslant b(t)\left[\psi(g(t))\eta^{-1}(g(t))\right]^{\lambda}+\frac{\lambda K_1}{a(t)}w^2(t),\quad 0<\lambda<1,\quad t\geqslant t_2.\end{aligned} \tag{43}$$

当$\lambda\geqslant 1$时，函数$[a(t)(-x''(t))]^{\frac{\lambda-1}{\lambda}}$非减，故存在常数$K_2>0$和充分大$t_3$，使得

$$[a(t)(-x''(t))]^{\frac{\lambda-1}{\lambda}}\geqslant K_2,\qquad t\geqslant t_3.$$

因此，又由(42)式得

$$
\begin{aligned}
w'(t) &\geqslant b(t)\left[\psi(g(t))\eta^{-1}(g(t))\right]^{\lambda}+\frac{\lambda}{a^{\frac{1}{\lambda}}(t)}\left[-x''(t)\right]^{\frac{\lambda-1}{\lambda}}w^{1+\frac{1}{\lambda}}(t)\\
&=b(t)\left[\psi(g(t))\eta^{-1}(g(t))\right]^{\lambda}+\frac{\lambda}{a(t)}\left[a(t)(-x''(t))\right]^{\frac{\lambda-1}{\lambda}}w^{1+\frac{1}{\lambda}}(t)\\
&\geqslant b(t)\left[\psi(g(t))\tau^{-1}(g(t))\right]^{\lambda}+\frac{\lambda K_2}{a(t)}w^{1+\frac{1}{\lambda}}(t),\quad \lambda\geqslant 1,\quad t\geqslant t_3.
\end{aligned}\tag{44}
$$

联合(43)~(44)式有

$$
w'(t)\geqslant b(t)\left[\psi(g(t))\eta^{-1}(g(t))\right]^{\lambda}+\frac{K}{a(t)}w^{1+\frac{1}{\eta}}(t),\qquad t\geqslant t_3.\tag{45}
$$

其中$\eta=\max\{\lambda,1\},K=\min\{\lambda K_1,\lambda K_2\}$且当$\lambda=1$时，$K=1$.

其次，由(14)式知，$a(t)x''(t)$非增，存在$T\geqslant t_3$使得

$$
a(s)x''(s)\leqslant a(t)x''(t),\quad s\geqslant t\geqslant T.\tag{46}
$$

从t到l对(46)式积分得

$$
x'(l)\leqslant x'(t)+a(t)x''(t)\int_t^l a^{-1}(s)\mathrm{d}s.
$$

因此

$$
x'(t)\geqslant \rho(t)a(t)(-x''(t)),\qquad t\geqslant T.\tag{47}
$$

联合(39)式和(47)式得

$$
x'(t)\geqslant \rho(t)a(t)\frac{(x'(t))^{\lambda}}{a(t)}w(t)=\rho(t)(x'(t))^{\lambda}w(t).
$$

从而有

$$
(x'(t))^{1-\lambda}\geqslant \rho(t)w(t)>0.
$$

当$0<\lambda<1$时，函数$(x'(t))^{1-\lambda}$非增，故存在常数$l_1>0$，使得

$$
0<\rho(t)w(t)\leqslant l_1,\quad t\geqslant T.\tag{48}
$$

由(47)式得

$$
(x'(t))^{\lambda}\geqslant \rho^{\lambda}(t)\left[a(t)(-x''(t))\right]^{\lambda-1+1},\text{即}\quad \left[a(t)(-x''(t))\right]^{1-\lambda}\geqslant \rho^{\lambda}(t)w(t).
$$

当$\lambda\geqslant 1$时，函数$[a(t)(-x''(t))]^{1-\lambda}$为减函数，故存在常数$l_2$使得

$$
0<\rho^{\lambda}(t)w(t)\leqslant l_2,\quad t\geqslant T.\tag{49}
$$

注意到(48)~(49)式，有

$$
0<\rho^{\eta}(t)w(t)\leqslant l.\tag{50}
$$

其中$\eta=\max\{\lambda,1\},l=l_1+l_2$.

现以$\rho^{\eta}(t)$乘不等式(45)且从T到t积分得

$$
\begin{aligned}
\int_T^t\rho^{\eta}(s)b(t)\left[\psi(g(s))\eta^{-1}(g(s))\right]^{\lambda}\mathrm{d}s &\leqslant \int_T^t\rho^{\eta}(s)w'(s)\mathrm{d}s-K\int_T^t\rho^{\eta}(s)a^{-1}(s)w^{\frac{\eta+1}{\eta}}(s)\mathrm{d}s\\
&=\rho^{\eta}(s)w(s)\Big|_T^t-\int_T^t w(s)\mathrm{d}\rho^{\eta}(s)-K\int_T^t\rho^{\eta}(s)a^{-1}(s)w^{\frac{\eta+1}{\eta}}(s)\mathrm{d}s\\
&=\rho^{\eta}(t)w(t)-\eta\int_T^t\rho^{\eta-1}(s)w(s)\rho'(s)\mathrm{d}s-K\int_T^t\rho^{\eta}(s)a^{-1}(s)w^{\frac{\eta+1}{\eta}}(s)\mathrm{d}s\\
&=\rho^{\eta}(t)w(t)-\eta\int_T^t\rho^{\eta-1}(s)w(s)a^{-1}(s)\mathrm{d}s-K\int_T^t\rho^{\eta}(s)a^{-1}(s)w^{\frac{\eta+1}{\eta}}(s)\mathrm{d}s\\
&\leqslant l+\int_T^t\rho^{\eta-1}(s)a^{-1}(s)\left[\eta w(s)-K\rho(s)w^{\frac{\eta+1}{\eta}}(s)\right]\mathrm{d}s.
\end{aligned}\tag{51}
$$

在(51)式中利用了分部积分，(50)式和$\rho'(t)=-a^{-1}(t)$. 应用引理5的不等式，取$B=\eta,C=K\rho(s)$，则由(51)式得

$$\begin{aligned}\int_T^t \sigma\rho^{\eta}(s)b(t)\left[\psi(g(t))\eta^{-1}(g(t))\right]^{\lambda}\mathrm{d}s &\leqslant l+\int_T^t \rho^{\eta-1}(s)a^{-1}(s)\frac{\eta^{\eta}}{(\eta+1)^{\eta+1}}\frac{\eta^{\eta+1}}{K^{\eta}\rho^{\eta}(t)}\mathrm{d}s\\ &= l+\int_T^t\frac{1}{\rho(s)a(s)}\left(\frac{\eta}{\eta+1}\right)^{\eta+1}\left(\frac{\eta}{K}\right)^{\eta}\mathrm{d}s\\ &= l+\int_T^t\frac{\mu}{\rho(s)a(s)}\mathrm{d}s,\end{aligned}\tag{52}$$

其中常数$\mu=\left(\frac{\eta}{\eta+1}\right)^{\eta+1}\left(\frac{\eta}{K}\right)^{\eta}$. 因此

$$\int_T^t\left[\rho^{\eta}(s)b(t)\left(\psi(g(s))\eta^{-1}(g(s))\right)^{\lambda}-\frac{\mu}{\rho(s)a(s)}\right]\mathrm{d}s\leqslant l.\tag{53}$$

显然，(53)式和(37)式矛盾。证毕

注2　文献[15—18]中的结果都是在正则条件下获得的振动准则，而定理4获得了非正则条件下的振动准则，因此，定理4是已有文献结果的推广和改进。

注3　本文是文献[18]的一个补充，同时也改进了文献[18]的相关结果。

3　例子

例1　考虑具有无界中立系数的三阶Emden-Fowler型微分方程

$$\left[t\left(y(t)+\frac{5t+6}{t+1}y\left(\frac{t}{2}\right)\right)''\right]'+\frac{q_0}{t^2}y^3\left(\frac{t}{3}\right)=0,\quad t\geqslant 1,\tag{54}$$

其中常数$q_0>0$，$\lambda=3, a(t)=t, p(t)=\frac{5t+6}{t+1}, b(t)=\frac{q_0}{t^2}, \eta(t)=\frac{t}{2}, g(t)=\frac{t}{3}$.

易知$\eta(t)\geqslant g(t), 5\leqslant p(t)<6, \varphi^*(t)>\frac{2}{15}$. 取$\alpha(t)=t^2$，则$\varphi_*(t)>\frac{1}{30}\int_1^{+\infty}a^{-1}(t)\mathrm{d}t=+\infty$, 且

$$\int_1^{+\infty}\int_v^{+\infty}\frac{1}{a(u)}\int_u^{+\infty}b(s)(\varphi^*(g(s)))^{\lambda}\mathrm{d}s\mathrm{d}u\mathrm{d}v\geqslant\int_1^{+\infty}\int_v^{+\infty}\frac{1}{u}\int_u^{+\infty}\frac{q_0}{s^2}\left(\frac{2}{15}\right)^3\mathrm{d}s\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\left(\frac{2}{15}\right)^3q_0\int_1^{+\infty}\int_v^{+\infty}\frac{1}{u^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v=+\infty.$$

因此，条件(A_1)~(A_3),(4)、(10)和(15)式均满足。下面验证条件(22)，因$\xi=1$，取$\gamma(t)=t,\delta=1$，有

$$\begin{aligned}&\int_{t_0}^{+\infty}\left[\gamma(s)b(s)\left(\varphi_*(g(s))\right)^{\lambda}\frac{\left(\eta^{-1}(g(s))\right)^{2\lambda}}{s^{2\lambda}}-\frac{a(s)\left(\gamma_+'(s)\right)^{\xi+1}}{\left(\delta L_0 s\gamma(s)\right)^{\xi}}\right]\mathrm{d}s\\ \geqslant&\int_1^{+\infty}\left[s\cdot\frac{q_0}{s^2}\cdot\left(\frac{1}{30}\right)^3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^6-\frac{s}{L_0s^2}\right]\mathrm{d}s=\left[\left(\frac{1}{30}\right)^3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^6q_0-\frac{1}{L_0}\right]\int_1^{+\infty}\frac{1}{s}\mathrm{d}s=+\infty.\end{aligned}$$

故条件(22)成立。因此，由定理2知方程(54)的每一解$x(t)$弱振动。文献[1-13,15-19]及其引文中的振动结果均不能适用于方程(54)。

例2　考虑三阶Emden-Fowler型微分方程

$$\left[t^2\left(x(t)+\frac{5t+6}{t+1}x\left(\frac{t}{2}\right)\right)''\right]'+q_0x^3\left(\frac{t}{3}\right)=0,\quad t\geqslant 1,\tag{55}$$

其中常数$q_0>0$，设$\lambda=3, a(t)=t^2, p(t)=\frac{5t+6}{t+1}, \eta(t)=\frac{t}{2}, b(t)=q_0, g(t)=\frac{t}{3}$.

易知$\eta(t)\geqslant g(t),\int_1^{+\infty}a^{-1}(t)\mathrm{d}t=\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t<+\infty,\rho(t)=\int_t^{+\infty}a^{-1}(s)\mathrm{d}s=\frac{1}{t}$, 取$\alpha(t)=t^2,\beta(t)=t^2$，则有

$\varphi_*(t)>\frac{1}{30}$，$\psi(t)>\frac{1}{30}$且$\int_1^{+\infty}\int_v^{+\infty}\frac{1}{a(u)}\int_u^{+\infty}b(s)(\varphi^*(g(s)))^{\lambda}\mathrm{d}s\mathrm{d}u\mathrm{d}v\geqslant\int_1^{+\infty}\int_v^{+\infty}\frac{1}{u^2}\int_u^{+\infty}q_0\left(\frac{2}{15}\right)^3\mathrm{d}s\mathrm{d}u\mathrm{d}v=+\infty.$

因此，条件(A_1)~(A_3),(5)式满足，(10)式也满足。

取$\gamma(t)=1$, 即有条件(22)成立。下面验证条件(37)，因$\eta=\lambda=3$, 则有

$$\int_T^{+\infty}\left[\rho^{\eta}(t)b(t)\left(\psi(g(t))\eta^{-1}(g(t))\right)^{\lambda}-\frac{\mu}{\rho(t)a(t)}\right]\mathrm{d}t \geqslant \int_T^{+\infty}\left(\frac{4q_0}{405}-\frac{\mu}{t}\right)\mathrm{d}t=+\infty.$$

故(37)式成立。由定理4知，方程(55)的每一解振动或者收敛到零。

参考文献：

［1］ GRAEF J R，SAKER S H. Oscillation theory of third-order nonlinear functional differential equations［J］. Math Hiroshima J，2013，43(24)：49-72.

［2］ LI T , ROGOVCHENKO Y V. Asymptotic behavior of higher-order quasilinear neutral differential equations [J]. Abstract and Applied Analysis, 2014：Article ID 395368.

［3］ BACULIKOVA B，DZURINA J. Oscillation of third-order neutral differential equations［J］. Math and Comp Mode，2010，52(12)：215-226.

［4］ BACULIKOVA B，RANI B，SELVARANGAM S，et al. Properties of Kneser's solution for half-linear third order neutral differential equations，Acta Mathematica Hungarica，2017，152(2)：525-533.

［5］ DOSLA Z，LISKA P. Oscillation of third-order nonlinear neutral differential equations［J］. Applied Mathematics Letters，2016，56：42-48.

［6］ DZURINA J，GRACE S R，JADLOVSKA I. On nonexistence of Kneser solutions of third-order neutral delay differential equations［J］. Applied Mathematics Letters，2019，88：193-200.

［7］ GRACE S R，GRAEF J R，EL-BELTAGY M A. On the oscillation of third order neutral delay dynamic equations on time scales［J］. Computers & Mathematics with Applications，2012，63(4)：775-782.

［8］ GRACE S R，GRAEF J R，TUNC E. Oscillatory behavior of a third-order neutral dynamic equation with distributed delays［C］//in Proceedings of the 10th Colloquium on the Qualitative Theory of Differential Equations，Szeged，Hungary，2016：1-14.

［9］ GRACE S R，JADLOVSKA I. Oscillatory behavior of odd-order nonlinear differential equations with a nonpositive neutral term［J］. Dynamic Systems and Applications，2018，27(1)：125-136.

［10］ HASSAN T S，GRACE S R. Oscillation criteria for third order neutral nonlinear dynamic equations with distributed deviating arguments on time scales［J］. Tatra Mountains Mathematical Publications，2014，61(1)：141-161.

［11］ JIANG Y, JIANG C, LI T. Oscillatory behavior of third-order nonlinear neutral delay differential equations [J]. Mathematics in Practice & Theory, 2009, 2016(1): 1-12.

［12］ LI T，TANDAPANI E. Oscillation of solutions to odd-order nonlinear neutral functional differential equations［J］. Electronic Journal of Differential Equations，2011：Article ID 23.

［13］ MIHALKOVA B. KOSTIKOVA E. Boundedness and oscillation of third order neutral differential equations［J］. Tatra Mountains Mathematical Publications，2009，43(1)：137-144.

［14］ LIN W. Oscillations of certain third order nonlinear neutral functional differential equations with damping［J］. Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Sunyatseni，2015，54(6)：53-56.

［15］ GRAEF J R，TUNC E，GRACE S R. Oscillatory and asymptotic behavior of a third-order nonlinear neutral differential equation［J］. Mathematica Opuscula，2017，37(6)：839-852.

［16］ LI T，ZHANG C. Properties of third-order half-linear dynamic equations with an unbounded neutral coefficient［J］. Advances in Difference Equations，2013：Article ID 333.

［17］ TUNC E. Oscillatory and asymptotic behavior of third-order neutral differential equations with distributed deviating arguments［J］. Electronic Journal of Differential Equations，2017：Article ID 16.

［18］ CHATZARAKIS G E，GRACE S R，JADLOVSKA I，et al. Oscillation criteria for third-order Emden-Fowler differential equations with unbounded neutral coefficients［J］. Hindawi Complexity，2019：Article ID 5691758. https://doi. org/10. 1155/2019/5691758.

［19］ ZHANG Z，WANG X，YU Y. Oscillation of third-order half-linear neutral differential equations with distributed delay［J］. Acta Math Appl，2015，38(3)：450-459.

［20］ CANDAN T. Oscillatory behavior of second-order nonlinear functional differential equations with distributed deviating arguments［J］. Appl Math Comput，2015，262(15)：199-203.

［21］ AGARWALR P，GRACE S R，O'REGAN D. Oscillation theory for difference and functional differential equations［M］. Dordrecht：Marcel Dekker，Kluwer Academic，2000.

（责任编辑　冯兆永）